NUMERIK PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I

Übungsblatt 1 , Abgabe: 27.10.1994 , 11.00 Uhr

Aufgabe 1:
(4 Punkte)

Benutzen Sie die Methode der getrennten Variablen, um folgende Gleichungen zu lösen:

a) $u_x + u_{ttt} = 0$ (2 Punkte)

b) $-2u + u_x + u_{xx} + u_{tt} = 0$ (2 Punkte)

(u:= u(x,t))

Aufgabe 2:
(4 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $axu_x + by \cdot u_y = cu$ (2 Punkte)

b) $ax^2u_x + by^2 \cdot u_y = cu$ (2 Punkte)

(u:= u(x,y))

Aufgabe 3:
(4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die quasi-lineare Gleichung für die der folgende Ausdruck die allgemeine Lösung darstellt:

$$F(x \cdot y, \frac{x}{u}) = 0$$

(2 Punkte)

(b) Der Mathematica-Befehl *Eliminate* kann dazu benutzt werden, die Lösungsschritte in Aufgabe 3 a) symbolisch durchzuführen. Der unten angegebene Algorithmus für *Eliminate* kann zur Eliminierung der beliebigen Funktion F aus dem Ausdruck

$$F(f(x,y,z), g(x,y,z)) = 0$$

benutzt werden.

Dabei sind f, g gegebene Funktionen und z ist eine Funktion in x und y. Die angegebene Befehlsfolge illustriert die Vorgehensweise für die Funktionen

$$f(x,y,z) = x + z\ , \quad g(x,y,z) = y + z$$

```
f[x,y,z] = x + z[x,y]
g[x,y,z] = y + z[x,y]
Eqn  = F[f[x,y,z],g[x,y,z]] == 0
Eqn1 = D[Eqn,x]
Eqn2 = D[Eqn,y]
Eqn3 = D[Eqn,z]
{Eqn1, Eqn2, Eqn3} = {Eqn1, Eqn2, Eqn3}/.{z[x,y]->u,
 Derivative [1,0][z][x,y]-> p,
 Derivative [0,1][z][x,y]-> q,
 Derivative [1,0][F][f[x,y,z],g[x,y,z]]->F1,
 Derivative [0,1][F][f[x,y,z],g[x,y,z]]->F2}
Eliminate[{Eqn1, Eqn2},{F1}]
```

Lösen Sie mit diesem Algorithmus Aufgabe 3 a). (2 Punkte)

Aufgabe 4:
(4 Punkte)

Lösen Sie die Gleichung

$$x^2 u_x - xy\ u_y + y^2 = 0.$$

NUMERIK PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I

Übungsblatt 2 , Abgabe: 03.11.1994 , 11.00 Uhr

Aufgabe 5:

a) Zeigen Sie, daß Lemma 6.1 im Skript falsch ist, indem Sie ein zusammenhängendes Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^2$ und eine Lösung $u \in C^1(\Omega)$ der Gleichung $u_t + cu_x = 0$, $(x,t) \in \Omega$, angeben, so daß kein $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ mit $u(x,t) = \varphi(x-t)$, $(x,t) \in \Omega$, existiert.

b) Zeigen Sie, daß Lemma 6.1 richtig ist, falls das Gebiet zusätzlich konvex ist.

Aufgabe 6:

a) Benutzen Sie die Methode der getrennten Veränderlichen, um Lösungen der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

zu finden.

b) Zeigen Sie, daß die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ &u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ &u_y(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

schlecht gestellt ist.

Hinweis:

Zeigen Sie, daß die Lösung von b) nicht stetig von den Anfangswerten abhängt, indem Sie spezielle Funktionen für f und g einsetzen.

Aufgabe 7:

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Gleichung mit der Methode von Lagrange:

$$(y^2 - u^2)u_x - xyu_y = xu.$$

(2 Punkte)

Hinweis:

Benutzen Sie $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d}$. Das Charakteristikenverfahren erfordert die Benutzung elliptischer Integrale.

b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung, die die Kurve $x = y = u, \quad x > 0$, enthält.

(Die Lösung lautet $u = \frac{3y-(5y^2-4x^2)^{\frac{1}{2}}}{2}$)

(1 Punkt)

c) Stellen Sie die Lösungsfläche aus Teil b) mit Hilfe von Mathematica am Bildschirm dar, und erstellen Sie daraus eine Postscript-Datei. Legen Sie einen Ausdruck Ihren Lösungen bei. (1 Punkt)

Aufgabe 8:

Berechnen Sie den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten

$$x = r\cos\varphi\ ,\ y = r\cdot\sin\varphi\ ,\ z = z$$

Hinweis:

Hier soll die Transformationsformel für mehrfache Integrale zur Anwendung kommen, s.a. Forster III, S. 28 ff.

Zur Reduzierung des Rechenaufwands sollten Sie Mathematica benutzen. Ein Beispielprogramm für räumliche Polarkoordinaten ist im folgenden abgedruckt. Die im folgenden Programm auftretenden Variablen stehen zu denen in Forster wie folgt in Bezug: $h_i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\ ,\ J := \frac{1}{\sqrt{g}}\ , \qquad f = \phi$

```
u:= {r,theta,phi}

h:= {1,r,r Sin[theta]}

J=h[[1]]h[[2]]h[[3]];

Grad[f_]:=Table[D[f,u[[i]]]/h[[i]],{i,1,3}]

Div[f_]:=(1/J)Sum[D[(J f[[i]])/h[[i]],u[[i]]],{i,1,3}]

Grad[f[r,theta,phi]]

Expand[Div[Grad[f[r,theta,phi]]]]
```

NUMERIK PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I

Übungsblatt 3 , Abgabe: 10.11.1994 , 11.00 Uhr

Aufgabe 9:
(5 Punkte)

Das Lax-Friedrichs-Schema für die Advektionsgleichung $u_t + cu_x = 0$ ist definiert durch

$$\frac{u_i^{j+1} - \frac{1}{2}(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j)}{k} + c\frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} = 0. \qquad (*)$$

a) Bestimmen Sie den Abhängigkeitsbereich des Differenzenschemas.

b) Wie lautet hier die CFL-Bedingung?

c) Zeigen Sie, daß wenn der Differenzenoperator auf der linken Seite von (*) auf eine glatte Funktion $u(x,t)$ angewandt wird, folgender "lokaler Diskretisierungsfehler" entsteht:

$$e_{h,k} = u_t + au_x + \frac{1}{2}ku_{tt} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{k}u_{xx} + \frac{1}{6}c \cdot h^2 u_{xxx} + 0(h^4 + \frac{h^4}{k} + k^2)$$

Aufgabe 10:
(5 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß sich aus dem Leapfrog-Schema für die Advektionsgleichung

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} + c \cdot \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0$$

folgende Abschätzung herleiten läßt

$$(1 - |c\lambda|) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{|u_m^{n+1}|^2 + |u_m^n|^2\} \leq (1 + |c\lambda|) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{u_m^1|^2 + |u_m^0|^2\} \qquad (\lambda := \frac{k}{h})$$

Hinweis:

Multiplizieren Sie das Leapfrog-Schema mit $u_m^{n+1} + u_m^{n-1}$ und summieren Sie über alle Werte von m. Leiten Sie damit folgende Beziehung her

$$\begin{aligned}&\sum_{m=-\infty}^{\infty} |u_m^{n+1}|^2 + |u_m^n|^2 + c\lambda(u_m^{n+1}u_{m+1}^n - u_{m+1}^{n+1}u_m^n)\\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} |u_m^n|^2 + |u_m^{n-1}|^2 + c\lambda(u_m^n u_{m+1}^{n-1} - u_{m+1}^n u_m^{n-1})\\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} |u_m^1|^2 + |u_m^0|^2 + c\lambda(u_m^1 u_{m+1}^0 - u_{m+1}^1 u_m^0),\end{aligned}$$

und wenden Sie die Ungleichung $-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ an.

b) Zeigen Sie mit a), daß das Leapfrog-Schema für $|c \cdot \lambda| < 1$ stabil ist.

Aufgabe 11:
(8 Punkte) (Programmieraufgabe, Abgabe: 17.11.94)

Lösen Sie numerisch die Advektionsgleichung

$$u_t + u_x = 0$$

für $(x,t) \in [-1,3] \times [0,2.4]$ mit den Anfangswerten

$$u(0,x) := \begin{cases} (\cos \pi x)^2, & \text{falls} \quad |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

und den Randwerten $u(t,-1) = 0$. Benutzen Sie dazu die folgenden vier Verfahren:

a) Forward-time backward-space

b) $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} + c\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{h} = 0$

c) Lax-Friedrichs
(siehe Aufgabe 9)

d) Leapfrog
(siehe Aufgabe 10)

Verwenden Sie für alle Methoden $\lambda = 0,8$ und $h = \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$. Dazu Lax-Friedrichs mit $\lambda = 1,6$ und $h = \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$.

Für Verfahren b), c), d): Benutzen Sie am rechten Rand ($x_M = 3$) die Bedingung $u_M^{n+1} = u_{M-1}^{n+1}$. Für die Methode d) sollten Sie b) benutzen, um die Lösung für $n = 1$ zu berechnen.

Mit Hilfe Ihrer Programme sollten Sie herausfinden, welche Verfahren sinnvoll sind und welche nicht.

Ein Verfahren soll (**nur in dieser Aufgabe**) *nicht sinnvoll* heißen, wenn $|u_m^n| > 5$ an mindestens einem Gitterpunkt (n,m). Es soll *sinnvoll* sein, wenn der Graph der berechneten Lösung wie eine "gute" Approximation der Lösung der Advektionsgleichung aussieht.

Drucken Sie die Lösung des jeweiligen Verfahrens zu verschiedenen Zeitschritten aus.

Was fällt Ihnen an der "blow-up time" der nicht sinnvollen Verfahren auf, während die Gittergröße abnimmt? Untersuchen Sie bei den sinnvollen Verfahren, wie der Fehler abnimmt, wenn Sie die Gittergröße h halbieren.

NUMERIK PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I

Übungsblatt 4 , Abgabe: 17.11.94 , 11.00 Uhr

Aufgabe 12:

Transformieren Sie die folgenden Gleichungen auf die Form $u_t = u_{xx}$.

a) $u_t = a\, u_{xx} \quad , a \equiv$ const (1 Punkt)

b) $u_t = a(t)\, u_{xx} \quad , a(t) > 0$ (1 Punkt)

c) $u_t = u_{xx} - b(t) u_x$ (2 Punkte)

Aufgabe 13:

Zeigen Sie, daß man beim Anfangswertproblem der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{array}{lcl} u_t & = & u_{xx} \quad , (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) & = & \varphi(x) \quad , x \in \mathbb{R}, \end{array}$$

nur die Werte $u(x,t)$ für $t = 0$ vorschreiben darf, nicht aber die von $u_t(x,0)$. (2 Punkte)

Aufgabe 14:

Zeigen Sie, daß die Fundamentallösung

$$s(x,t) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{4t}} \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ ist. (2 Punkte)

Aufgabe 15:

Zeigen Sie, daß man bei der Betrachtung der Differentialgleichung

$$u_{xx} + u_t = 0$$

kein sachgemäßes Anfangswertproblem mehr stellen kann. (4 Punkte)

Hinweis:

Machen Sie folgenden Ansatz

$$u_\lambda(x,t) = X\left(\frac{x}{\lambda}\right) \cdot T\left(\frac{t}{\lambda^2}\right) \qquad , \lambda > 0$$

und lösen Sie diesen, indem Sie die Methode der Trennung der Veränderlichen benutzen. Wählen Sie aus allen möglichen Lösungen eine passende Schar $u_\lambda(x,t)$ aus, und untersuchen Sie auf stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten.

NUMERIK PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I

Übungsblatt 5 , Abgabe: 24.11.94 , 11.00 Uhr

Aufgabe 16:
(4 Punkte)

(**Programmieraufgabe!** Abgabe: 01.12.94)

Lösen Sie numerisch das folgende Anfangs-Randwertproblem für die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \qquad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,T) \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \qquad t > 0 \\ u(x,0) &= 1 - |1 - \tfrac{2}{\pi}x| \qquad x \in [0,\pi]. \end{aligned}$$

Benutzen Sie dazu das klassische explizite Differenzenverfahren und wählen Sie als Ortsschrittweite $h = \frac{\pi}{20}$ und als Zeitschrittweite $k = \lambda \cdot h^2$ mit

a) $\lambda = \frac{5}{9}$

b) $\lambda = \frac{5}{11}$.

Iterieren Sie jeweils bis $T > 15h^2$. Erzeugen Sie für jede Teilaufgabe einen 3-D-Plot und legen Sie diesen Ihren Lösungen bei.

Aufgabe 17:
(4 Punkte)

Es sei $u(x,t)$ die Lösung des ARWP

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \qquad (x,t) \in (-1,1) \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= 1 \qquad x \in [-1,1] \\ u(-1,t) &= u(1,t) = e^{-t} \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Für alle $(x,t) \in [-1,1] \times (0,\infty)$ gilt

$$\cos(x) \leq u(x,t)e^t \leq \frac{\cos(x)}{\cos(1)}$$

Hinweis: Benutzen Sie das Maximum Prinzip.

Aufgabe 18:

(4 Punkte)

Es sei $G = (0, L) \times 0, T$ und $u(x,t)$ eine Lösung der Gleichung

$$u_t = u_{xx} + u_x$$

mit

$$u \in \mathcal{C}^2(G \cup \{t = T\}) \cap \mathcal{C}(\overline{G}).$$

Zeigen Sie, daß u ihr Maximum auf

$$\{x = 0\} \cup \{x = L\} \cup \{t = 0\}$$

annimmt.

Aufgabe 19:
(4 Punkte)

Sei u eine Lösung des AWP

$$\begin{array}{rcll} u_t & = & u_{xx} & (x,t) \in (-\infty, \infty) \times (0, \infty) \\ u(x,0) & = & \varphi(x) & x \in (-\infty, \infty). \end{array}$$

Dabei sei φ eine stückweise stetige Funktion auf $\mathbb{R}$, die zusätzlich die Beschränktheitsbedingung

$$|\varphi(x)| \leq C_1 e^{C_2 x^2} \quad x \in \mathbb{R}\ ,$$

mit positiven Konstanten C_1 und C_2 erfüllt. Zeigen Sie, daß sich aus der gleichmäßigen Konvergenz von $u(x,t)$ gegen $\varphi(x)$ auf kompakten Teilmengen der Stetigkeitsintervalle von φ zusammen mit der stückweisen Stetigkeit von φ die zweidimensionale, stückweise Stetigkeit von $u(x,t)$ in $t = 0$ ergibt.

Hinweis: Benutzen Sie (ohne Beweis), daß unter den gemachten Voraussetzungen $u(x,t)$ für $t \searrow 0$ gleichmäßig gegen $\varphi(x)$ konvergiert.

NUMERIK PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I

Übungsblatt 6 , Abgabe: 01.12.94 , 11.00 Uhr

Aufgabe 20:
(4 Punkte)

Zeigen Sie, daß das Volle Implizite Verfahren zur Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ die Ordnung $(1, 2)$ hat.

Aufgabe 21:
(4 Punkte) **Abgabe: 01.12.94**

Die Temperaturverteilung in einem Stab der Länge 1 genügt der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx} \ ,$$

wobei t die Zeit und x den Ort bezeichne. Für die Temperatur u in den beiden Endpunkten des Stabes gelten die Randbedingungen

$$u(0, t) = u_{(1,t)} = 12 \sin(12\pi t) \quad \text{für} \quad t \geq 0 \ ,$$

während der Stab am Anfang der Zeitrechnung die Temperatur 0 habe.

a) Berechnen Sie die Temperaturverteilung mit dem klassischen expliziten Verfahren. Benutzen Sie dei Ortsschrittweite $h = 1/6$ und die Zeitschrittweite $k = 1/72$.

b) Zur Zeit $t = 1/12$ herrscht an beiden Enden die Temperatur $u = 0$. Diese Nulltemperatur breitet sich im Stab aus. Wie lange dauert es, bis sie den Mittelpunkt des Stabes erreicht hat?

Hinweis: Modifizieren Sie das Programm aus Aufgabe 16, so daß Sie inhomogene Randwerte benutzen können.

Aufgabe 22:
(4 Punkte) **Abgabe: 08.12.94**

Lösen Sie das ARWP für $u_t = u_{xx}$ auf $-1 \leq x \leq 1$ mit den Anfangswerten

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1 & \text{, falls} \quad |x| < 1/2 \\ 1/2 & \text{, falls} \quad |x| = 1/2 \\ 0 & \text{, falls} \quad |x| > 1/2 \end{cases}$$

Löse bis zum Zeitpunkt $T = 1/2$. Die Randwerte und die exakte Lösung sind durch

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + 2\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \quad \frac{\cos(\pi(2l+1)x)}{\pi(2l+1)} \quad \mathrm{e}^{-\pi^2(2l+1)^2 t}$$

gegeben.

Benutzen Sie das Crank-Nicolson-Verfahren mit $h = 1/10,\ 1/20$ und $1/40$. Vergleichen Sie Genauigkeit und Effizienz für $\frac{k}{h} = 1$ und ebenfalls für $\frac{k}{h^2} = 10$. Zeigen Sie außerdem durch ihre Berechnungen, daß der Fehler in der Lösung bei $\frac{k}{h} = const$ nicht abnimmt, wenn er in der Supremumsnorm gemessen wird, dies jedoch der Fall ist, wenn man die L^2-Norm benutzt.

NUMERIK PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I

Übungsblatt 7 , Abgabe: 08.12.94 , 11.00 Uhr

Aufgabe 23:
(4 Punkte)

Die Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad \text{in } [0, L] \times \mathbb{R}_+$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sin(2\pi n x/L) \\ u_t(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

soll zusätzlich die Perioditätsbedingung

$$u(x,t) = u(x+L,t)$$

erfüllen.

a) Die Wellengleichung kann mit $v = u_t$ als ein System von Differentialgleichungen in der Form

$$\begin{aligned} v_t &= c^2 u_{xx} \\ u_t &= v \end{aligned}$$

geschrieben werden.

Sei $U = (u, v)$, zeigen Sie: Das Problem ist schlecht gestellt, d. h. $\frac{||U(t)||}{||U(0)||}$ist unbeschränkt. Wählen Sie als Norm

$$||U|| = \left(\int_0^L |u|^2 + |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

b) Es seien $v = u_t$, $w = c u_x$. Wie lautet das Differentialgleichungssystem? Sei $U = (v, w)$, zeigen Sie, daß $\frac{||U(t)||}{||U(0)||}$ für jede Lösung des Differentialgleichungssystems beschränkt ist.

Aufgabe 24:
(4 Punkte)

Die Funktion $u = u(x, y)$ sei Lösung der Differentialgleichung

$$u_{xx} - u_{yy} = 5\mathrm{e}^{-2x} \sin(y) , \; x > 0, y > 0.$$

a) Durch welche der folgenden Anfangs- und Randbedingungen wird u eindeutig bestimmt

   1. $u(x,0) = 0\ ,\ \ u_x(0,y) = 0;$
   2. $u(x,0) = 0\ ,\ \ u_x(0,y) = 0$
      und $u(x,y) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0\ ;$
   3. $u(x,0) = u_y(x,0) = 0\ ;$
   4. $u(x,0) = u_y(x,0) = 0\ ,\ \ u_x(0,y) = 0?$

b) Bestimmen Sie die Lösung u mit den richtigen Anfangs- und Randwertbedingungen aus a).

Aufgabe 25:
(4 Punkte)

Betrachten Sie d'Alemberts Lösung

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)ds$$

der Wellengleichung

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

Untersuchen Sie den Einfluß der Terme f und g auf die Lösung u, indem Sie

a) $f(x) := \mathrm{e}^{-x^2}\ ,\ g(x) := 0$

b) $f(x) := 0\ ,\ g(x) := \mathrm{e}^{-x^2}$

mit $a^2 = 1$ betrachten und für die Zeitschritte $t = 0, 1, 2, 3$ jeweils einen Ausdruck erstellen. Benutzen Sie zur Lösung dieser Aufgabe Mathematica.

Aufgabe 26:
(Programmieraufgabe, Abgabe: 15.12.94) (4 Punkte)

a) Lösen Sie die Anfangs-Randwertaufgabe der Wellengleichung

$$\begin{array}{rcl} u_{tt} & = & u_{xx}\ ,\quad x \in [0,1], t \geq 0 \\ u(0,t) & = & 0 = u(1,t)\ ,\quad t \geq 0 \\ u(x,0) & = & \frac{1}{8}\sin(\pi x)\ ,\quad x \in [0,1] \\ u_t(x,0) & = & 0 \end{array}$$

mit dem expliziten Finite Differenzenverfahren

$$u_{i,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - u_{i,j-1} \quad (j \geq 1).$$

Benutzen Sie die Schrittweite $\Delta t = 0.1,\ t \in [0; 0,5]$ und $\Delta x = 0.1$ für $x \in [0,1]$.

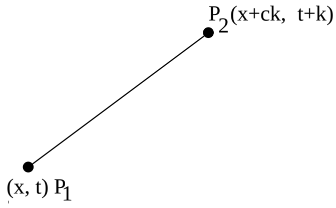
b) Berechnen Sie mit Hilfe des Verfahrens der Trennung der Veränderlichen die analytische Lösung und vergleichen Sie diese in verschiedenen Punkten mit der numerischen Lösung.

NUMERIK PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I

Übungsblatt 8 , Abgabe: 15.12.94 , 11.00 Uhr

Aufgabe 27:
(4 Punkte)

Zeigen Sie: Eine Funktion $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ ist eine Lösung der Gleichung $u_t + cu_x = 0$, genau dann, wenn u die partielle Differentialgleichung $u(x+ck,\ t+k) = u(x,t)$ für alle $k > 0$ erfüllt, d. h. wenn $u(P_1) = u(P_2)$ gilt mit P_1, P_2 wie in der Abbildung



Hinweis:

Benutzen Sie die Methode aus dem Beweis zum Satz 10.3 im Skript.

Aufgabe 28:
(4 Punkte)

Die Telegraphenleitung wird durch

$$u_{xx} = u_{yy} + u_y$$

definiert.

Zur Lösung des Anfangswertproblems

$$u(x,0) = f(x),\ u_y(x,0) = g(x)$$

kann man die Potenzreihenmethode benutzen. Zeigen Sie, daß für die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $u(x,y)$

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^{(k)}(x,0) y^k,$$

wobei $u^{(k)}(x,0) \equiv \frac{\partial^k u}{\partial x^k}|_{y=0}$, folgende Relation gilt

$$u^{(k)} = u_{xx}^{(k-2)} - u^{(k-1)}.$$

Benutzen Sie Mathematica, um die Reihe symbolisch zu berechnen.

Verwenden Sie die Kommandos

```
a[0,x_] := f[x];
a[1,x_] := g[x];
a[n_,x_] := If[n<0,0,D[a[n-2,s],{s,2}]-a[n-1,s]/. s -> x
u[x_,y_,n] := Sum[(1/k!)a[k,x]y^k, {k,0,n}]
```

Aufgabe 29:
(4 Punkte)

Zeigen Sie, daß

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} \frac{d^m}{dt^m} e^{(-1/t^2)}$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = 0$ ist. Warum kann man den Satz von Holmgren nicht anwenden?

Hinweis:

Benutzen Sie Cauchys Formel, um die Ableitungen von e^{-1/t^2} abzuschätzen. Wählen Sie als Rand einen Kreis um t mit dem Radius $t/2$.

Aufgabe 30:
(4 Punkte)

Betrachten Sie das System

$$u_t + A\, u_x + B\, u_y = 0,$$

wobei A und B Diagonalmatrizen sind.

Unter welchen Bedingungen ist dieses System streng hyperbolisch?

NUMERIK PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I

Übungsblatt 9 , Abgabe: 22.12.94 , 11.00 Uhr

Aufgabe 31:
(4 Punkte)

Man definiert eine schwache Lösung der eindimensionalen Wellengleichung als Funktion $u(x,t)$, die die folgende Gleichung erfüllt:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)(\phi_{tt}(x,t)-\phi_{xx}(x,t))dxdt = 0 \qquad \forall\phi \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^2)$$

a) Zeigen Sie, daß jede klassische $\mathcal{C}^2$-Lösung der Wellengleichung auch eine schwache Lösung ist.

b) Zeigen Sie, daß die unstetigen Funktionen

$$u(x,t) := H(x-t) \quad \text{und} \quad u(x,t) := H(x+t)$$

schwache Lösungen der Wellengleichung sind. Hierbei ist $H(x) := \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ die Heaviside Funktion.

Aufgabe 32:
(4 Punkte)

Bestätigen Sie das Divergenztheorem von Gauß für das Vektorfeld $X = x,\ Y = 1,\ Z = 0$. Als Bereiche wählen Sie

a) einen Würfel mit $a \leq x \leq a',\ b \leq y \leq b'$ und $c \leq z \leq c'$

b) eine Kugel mit $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$.

Aufgabe 33:
(4 Punkte)

Benutzt man das Konzept der schwachen Lösungen für die Burger-Gleichung, so verliert man die Eindeutigkeit der Lösung.

Zeigen Sie, daß

$$u = \begin{cases} 0 \quad , & x < \frac{1}{2}y \\ 1 \quad , & x \geq \frac{1}{2}y \end{cases}$$

und

$$u = \begin{cases} 0 \quad , & x < 0 \\ x/y \quad , & 0 < x/y \leq 1 \\ 1 \quad , & x > y \end{cases}$$

schwache Lösungen von $uu_x + u_y = 0$ sind, die den Bedingungen $u(x,0) = 0, \quad x < 0$ und $u(x,0) = 1, \quad x \geq 0$ genügen.

NUMERIK PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I

Übungsblatt 10 , Abgabe: 19.01.1995 , 11.00 Uhr

Aufgabe 34:
(4 Punkte)

Es wird das Autoverkehrsmodell mit $\rho_0 = 1$ und $c = 1$ betrachtet. Hierbei wird angenommen, daß bei $x = 0$ ein Unfall passierte und der Verkehr für eine Zeit τ dort stoppte. Betrug die relative Dichte $d := \rho/\rho_0$ hinter dem Verkehrsstau $d = \frac{1}{4}$, so wird nach der Zeit τ die x-Achse (Straße) bezüglich d in drei Abschnitte unterteilt:

$$d = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \quad x < \frac{-\tau}{4} \\ 1 & , \quad \frac{-\tau}{4} < x < 0 \\ 0 & , \quad 0 < x \end{cases}$$

(Eine Motivation dieser Daten wird in den Übungen gegeben.)

Hierbei wurde angenommen, daß der Verkehr, der vor dem Stau die Stelle $x = 0$ passierte, vernachlässigt werden kann. Für $u = 1-2d$, das in unserem Modell bekanntlich die Gleichung $\left(\frac{1}{2}u^2\right)_x + u_t = 0$ erfüllt, erhalten wir nun folgende Anfangsbedingungen:

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad x < \frac{-\tau}{4} \\ -1 & , \quad \frac{-\tau}{4} < x < 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

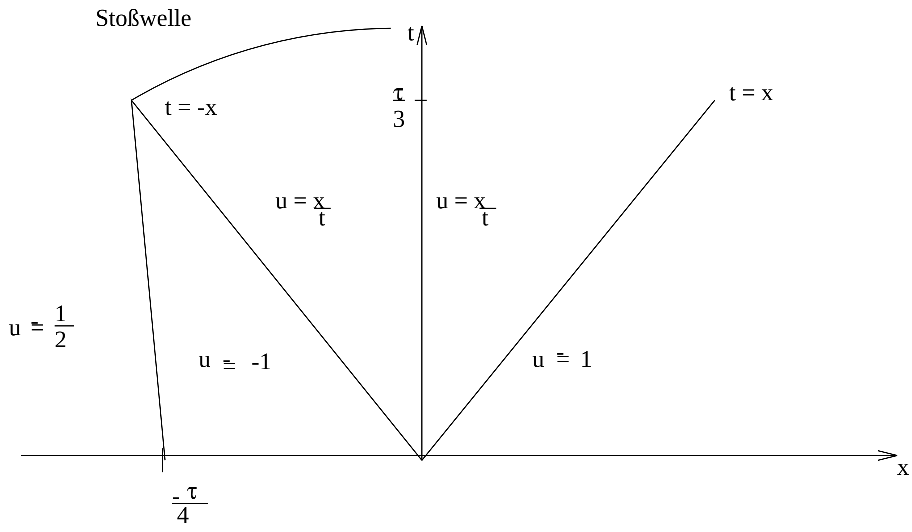
Die Lösung dieses Anfangsproblems beschreibt nun, wie sich der Verkehr wieder auflöst.

a) Zeigen Sie, daß sich die Lösung wie folgt darstellen läßt:

   Wie sieht die Gleichung der Kurve aus, auf der sich ausgehend von $\left(\frac{-\tau}{3}, \frac{\tau}{3}\right)$ die Stoßwelle fortpflanzt?

b) Wie sieht die Lösung aus, wenn die relative Verkehrsdichte hinter dem Verkehrsstau (in Richtung der positiven x-Achse) $d = \frac{3}{4}$ betrug?

Aufgabe 35:
(Programmieraufgabe, Abgabe: 26.01.1995)
(4 Punkte)



Betrachten Sie folgende Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \qquad \text{Burgers-Gleichung}$$

mit den Anfangswerten

$$u(x,0) = \mathrm{e}^{(-10\cdot(4x-1)^2)} \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lösen Sie dieses Anfangswertproblem mit dem

a) Lax-Wendroff-Verfahren

b) Upwind-Verfahren.

Benutzen Sie zur Ortsdiskretisierung $\Delta x = 0,01$ und zur Zeitdiskretisierung $\Delta t = 0,01$. Betrachten Sie das Zeitintervall $[0,t] = [0, 0.3]$ und legen Sie Ihrer Lösung grafische Ausdrucke zu Zeitpunkten $t = 0, 0.15$ und 0.3 bei.

Bemerkung:

Das Upwind-Verfahren für die Gleichung $u_t = (f(u))_x$ ist definiert durch

$$u_j^{n+1} := u_j^n - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{[1 - sign(a_{j+1/2}^n)]\Delta_{+x}\mathcal{F}_j^n + [1 + sign(a_{j-1/2}^n)]\Delta_{-x}\mathcal{F}_j^n\right\}.$$

Dabei bedeuten

$$a_{j\pm\frac{1}{2}}^n := \frac{\Delta_{\pm x}\mathcal{F}_j^n}{\Delta_{\pm x}u_j^n} \;, \quad \mathcal{F}_j^n := f(u_j^n).$$

Aufgabe 36:
(4 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist es, sich mit dem Programmpaket **clawpack** von Randy LeVeque vertraut zu machen. Mit diesem Paket können Gleichungen in Erhaltungsform in 1- und 2-Raumdimensionen gelöst werden. Clawpack befindet sich im Verzeichnis */share/numeric/src/clawpack/clawpack/clawpack/*. Finden Sie heraus, wie man die eindimensionale Burger-Gleichung mit clawpack lösen kann (betrachten Sie dazu das zugehörige Beispiel; Sie müssen **nicht** ein neues Programm schreiben).

Kopieren Sie sich schließlich das Verzeichnis */NumPDGLWS 94-95/* und führen Sie das Programm aus. Benutzen Sie dabei die in der Dokumentation angegebenen Daten für die Intervallbreite und wählen Sie sinnvolle Daten für Δx und Δt (clawpack prüft ob die CFL-Bedingung erfüllt ist). Fertigen Sie graphische Ausdrucke zu den verschiedenen Zeitpunkten an und legen Sie diese Ihrer Lösung bei.

Bemerkung:

Diese Aufgabe dient als Vorbereitung für die eigenständige Lösung von Gleichungen mit
clawpack.

NUMERIK PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I

Übungsblatt 11 , Abgabe: 26.01.1995 , 11.00 Uhr

Aufgabe 37:
(4 Punkte)

Betrachten Sie die Differentialgleichungen

1. $u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0,$
2. $(u^2)_t + \left(\frac{2}{3}u^3\right)_x = 0.$

Zeigen Sie, daß

a) beide Gleichungen dieselbe glatte Lösung besitzen, aber

b) die Rankine-Hugoniot-Bedingung zwei verschiedene Stoßwellengeschwindigkeiten liefert und somit auch zwei verschieden schwache Lösungen existieren.

Hinweis:

Der Begriff der schwachen Lösung, wie in der Vorlesung definiert wurde, gilt auch für Gleichungen der Form $\frac{\partial}{\partial x}a(x,y,u) + \frac{\partial}{\partial y}b(x,y,u) = 0$

Aufgabe 38:
(4 Punkte)

Einige Verfahren sind einfacher zu verstehen, wenn man sie in zwei Schritten schreibt. Betrachten Sie das folgende Schema zur Lösung der Advektionsgleichung $u_t + au_x = f$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_m^{n+1} &= v_m^n - \tfrac{1}{2}a\lambda\left(v_{m+1}^n - v_{m-1}^n\right) + k\, f_m^n \\ v_m^{n+1} &= \tfrac{1}{4}\left(\tilde{v}_{m+1}^{n+1} + 2\tilde{v}_m^{n+1} + \tilde{v}_{m-1}^{n+1}\right). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß dieses Verfahren genau dann stabil ist, wenn $|a\lambda| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe 39:
(4 Punke)

Eine Finite Differenzenmethode heißt dissipativ von der Ordnung $2s$, wenn zwei Konstanten $\alpha > 0$ und τ existieren, s.d. für den Verstärkungsfaktor gilt

$$|g| \leq 1 - \alpha(k\Delta x)^{2s}\,, \quad \forall |k\Delta x| \leq \pi \qquad \forall \Delta t \leq \tau.$$

Zeigen Sie:

Das Lax-Wendroff-Verfahren zur Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} &u_t + cu_x = 0 \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ &u(x,0) = f(x) \end{aligned}$$

ist dissipativ von der Ordnung 4.

Aufgabe 40:
(4 Punkte)

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + (f(u))_x &= 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \qquad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

soll mit dem Lax-Wendroff-Verfahren

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= u_{i,j} - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}(f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 [A_{i+\frac{1}{2},j}(f_{i+1,j} - f_{i,j}) - A_{i-\frac{1}{2},j}(f_{i,j} - f_{i-1,j})] \end{aligned}$$

mit

$$A_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i,j}}{2}\right)$$

gelöst werden.

Zeigen Sie, daß die Lax-Wendroff-Formel eine Erhaltungseigenschaft besitzt, d.h. auf einem endlichen Intervall unterscheiden sich die Summen $S_j = \sum_i u_{i,j}$ zweier aufeinanderfolgender Zeitschritte nur durch die "Fluß" durch die Intervallgrenzen.

NUMERIK PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I

Übungsblatt 12 , Abgabe: 02.02.1995 , 11.00 Uhr

Aufgabe 41:
(4 Punkte)

Es seien $K, T > 0$, $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ und es gelte

$$(g(\Delta t))^j \leq K \quad \text{für} \quad j \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad j\Delta t \leq T.$$

Zeigen Sie, daß es ein $\alpha > 0$ gibt mit

$$g(\Delta t) \leq 1 + \alpha \cdot \Delta t \quad \text{für} \quad \Delta t \leq 1.$$

Aufgabe 42:
(4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f(t) = \frac{t}{a^2 + t^2} \qquad , a > 0$$

und zeigen Sie, daß für die Fouriertransformierte gilt

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\omega}.$$

Hinweis:

$\mathcal{F}$ stellt dabei die Sinus-Fouriertransformation dar:

$$(\mathcal{F}f)(\omega) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cdot \sin(\omega x) dx$$

Benutzen Sie den Residuensatz der Funktionentheorie. Integrieren Sie nicht, wie oft üblich, über einen Halbkreisbogen, sondern benutzen Sie den Rand eines geschickt gewählten Quadrats als Integrationsweg.

Aufgabe 43:
(4 Punkte)

Zeigen Sie, daß das Differenzenverfahren

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{4}(falsch : D_0^2) u^{n+1} + \frac{3}{4} D_0^2 u^n$$

zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ genau dann stabil ist, wenn

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1.$$

Hinweis: Benutzen Sie die von–Neumann–Analyse.

Aufgabe 44:
(4 Punkte)

a) Benutzen Sie die 1d Version von clawpack, um das Anfangswertproblem in der Aufgabe 34 (Aufgabenblatt 10) zu lösen. Mit

$$\begin{aligned} & d = \tfrac{1}{4},\ \tau = 2 \\ & dx = 0,01,\ dt = 0,005 \\ & tend = 3,0,\ nout = 20 \\ & method(1) = 1 \quad \text{(variable Zeitschritte)} \\ & method(2) = 1 \quad \text{(Godunov)} \\ & method(3) = 1 \quad \text{(minmod)} \end{aligned}$$

auf dem Intervall (-1, 5, 0,5). Anschließend sollen die Ergebnisse mit den MATLAB-Befehlen

```
plot1xt
print -dps <Dateiname>
lpr <Dateiname>
```

gedruckt werden.

b) Wiederhole die Berechnungen mit einer anderen Wahl der Parameter und Methoden.

Bemerkung:

a) Um den Befehl

```
plot1xt
```

benutzen zu können, müssen Sie

1. das aktuelle MATLAB-Verzeichnis ändern
2. das Verzeichnis in dem

   ```
   plot1xt.m
   ```

   steht, im MATLAB path einfügen.

b) Sie brauchen das clawpack Verzeichnis /1d/examples/ex1bu2. Vier Dateien driver.f
icjam.f
bc1jam.f
compile
werden Ihnen zur Verfügung gestellt.